

Informativo técnico-científico ITC-05 /ATCP

Caracterização dos módulos elásticos de madeiras e derivados utilizando a Técnica de Excitação por Impulso

ATCP Engenharia Física
Divisão Sonelastic
www.sonelastic.com

Autores:

Eng. Lucas Barcelos Otani (Otani, L.B.)¹

Prof. Dr. Pedro Gutemberg de Alcântara Segundinho (Segundinho, P.G.A.)²

Profa. Dra. Elen Aparecida Martines Morales (Morales, E. A. M.)³

Dr. Antônio Henrique Alves Pereira (Pereira, A.H.A.)¹

(¹) ATCP Engenharia Física,

(²) Universidade Federal do Espírito Santo,

(³) Universidade Estadual Paulista – Campus Experimental de Itapeva

Revisão 1.4
26/06/2017

ÍNDICE

1. Objetivo.....	1
2. Introdução	1
3. Caracterização dos módulos elásticos de madeiras por meio da Técnica de Excitação por Impulso.....	3
3.1. Fundamentos da técnica.....	3
3.2. Modos de vibração.....	5
3.3. Os módulos elásticos das madeiras.....	7
3.3.1 Módulo de Young.....	8
3.3.2 Módulo de cisalhamento.....	9
3.3.3 Coeficiente de Poisson	9
3.4. Valores esperados para os módulos elásticos de madeiras	10
4. Estudo de caso 1: caracterização de barras de Eucalipto utilizando as soluções Sonelastic®	11
4.1. Materiais e métodos	11
4.2. Resultados e discussão	13
5. Estudo de caso 2: Estimativa e caracterização do módulo de Young de um cilindro compósito metálico e de uma tora de madeira contendo cerne e alburno	15
5.1. Fundamentos e equações.....	15
5.2. Materiais e métodos	16
5.3. Resultados e discussão	18
6. Considerações finais.....	21
7. Referências bibliográficas.....	22
Apêndice A – Teoria da elasticidade aplicada às madeiras	23
Apêndice B – Elaboração de um modelo para previsão do módulo de Young do cerne e do alburno de cilindros de madeiras	28
Apêndice C – Perguntas frequentes (FAQ)	33

1. Objetivo

O objetivo deste informativo técnico-científico é apresentar a teoria e a metodologia para a caracterização não-destrutiva dos módulos elásticos de madeiras e derivados pela Técnica de Excitação por Impulso (norma ASTM E1876 [1] e correlatas). Este informativo apresenta uma revisão da literatura e os avanços realizados pela ATCP Engenharia Física na aplicação desta técnica para a caracterização desta classe de materiais.

2. Introdução

A madeira, tanto pela sua disponibilidade quanto pelas suas características, foi um dos primeiros materiais utilizados pelo homem para fins estruturais. Pode ser classificada como sendo um composto sólido, orgânico, formado majoritariamente por celulose, cuja principal função é manter a sustentação das árvores [2].

É um material proveniente de caules que crescem anualmente em diâmetro e comprimento. Além de sua função estrutural, também serve como matéria-prima para processos diversificados como produção de papel, móveis e carvão vegetal.



Figura 1 - Ponte localizada na floresta de Montmorency para a travessia do rio Montmorency, Quebec, Canadá. Possui vão de 44 m, altura de 33 m e largura de 4,8 m [3].

Devido às características microestruturais advindas de sua origem natural, a madeira apresenta propriedades físicas distintas de acordo com a orientação (anisotropia) [2]. As três principais direções que caracterizam estes materiais estão apresentadas na figura 2 e listadas a seguir:

- Longitudinal (L): direção paralela às fibras;
- Radial (R): direção perpendicular aos anéis de crescimento;
- Tangencial (T): direção tangencial aos anéis de crescimento.

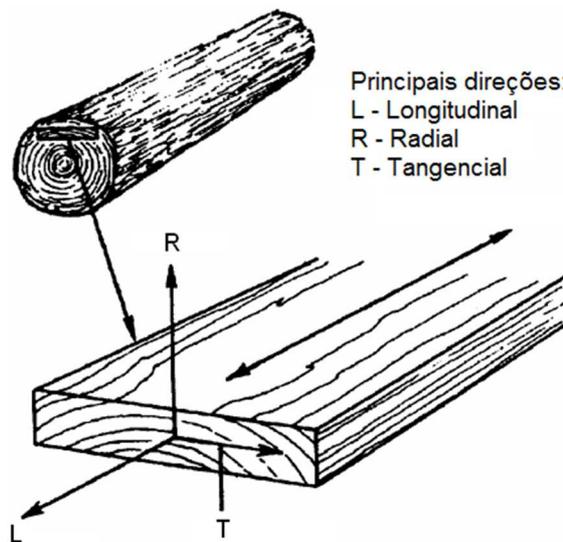


Figura 2 - Principais direções adotadas para madeiras [4].

A madeira é classificada como um material ortotrópico, ou seja, apresenta planos ortogonais de simetria que fazem com que suas propriedades sejam constantes de acordo com estes planos [5]. Esta classificação pode ser considerada uma simplificação, pois dependendo da propriedade que se está avaliando, verifica-se que há uma variação de valores ao longo da direção radial, por exemplo.

A caracterização das propriedades elásticas se faz importante para materiais como a madeira, pois os resultados são utilizados na seleção de materiais, em simulações numéricas, em cálculos estruturais e na estimativa de propriedades mensuráveis apenas por ensaios destrutivos. Dada essa importância, os módulos elásticos também são largamente utilizados na classificação e no controle de qualidade de madeiras.

Estas aplicações são possíveis devido à sensibilidade destas propriedades à presença de descontinuidades, defeitos, rachaduras, nós, alterações microestruturais e composição química [6].

3. Caracterização dos módulos elásticos de madeiras por meio da Técnica de Excitação por Impulso

3.1. Fundamentos da técnica

A Técnica de Excitação por Impulso (ASTM E1876 [1]) consiste essencialmente na determinação dos módulos elásticos de um material a partir das frequências naturais de vibração de um corpo de prova de geometria regular (barra, cilindro, disco ou anel). Estas frequências são excitadas por meio de um impacto mecânico de curta duração, seguido da captação da resposta acústica por um sensor. Um tratamento matemático é feito no sinal para a obtenção do espectro de frequências (Transformada Rápida de Fourier). A partir disso, são calculados os módulos elásticos dinâmicos através de equações previstas em norma, tal que são consideradas a geometria, a massa, as dimensões do corpo de prova e a frequência obtida pelo equipamento [1].

Para a excitação dos modos de vibração desejados é necessário impor determinadas condições de contorno. Na figura 3 é apresentado um exemplo de apoio, de posição de excitação e de captação da resposta acústica para o modo de vibração flexional de uma barra retangular.

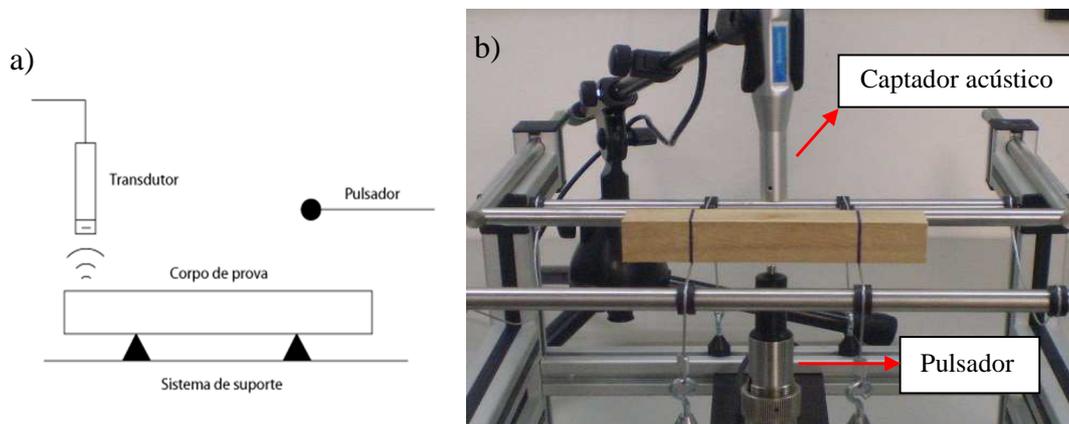


Figura 3 – a) Esquema básico de caracterização de uma barra no modo de vibração flexional por meio da Técnica de Excitação por Impulso [8] e b) Suporte para barras e cilindros SA-BC desenvolvido e fabricado pela ATCP Engenharia Física.

Os módulos obtidos pela Técnica de Excitação por Impulso são dinâmicos e sua correlação com o método quase-estático foi investigado para amostras de *Eucalyptus sp.* (equação A) e *Pinus oocarpa* (equação B) [7]. Segue abaixo a correlação encontrada, em MPa, entre o módulo de Young medido na direção transversal obtido através de um ensaio

quase-estático (E_E) e o módulo de Young medido na direção longitudinal obtido de forma dinâmica pela técnica de excitação por impulso (E_D) [7]:

$$E_D = 864,75 + 0,99 E_E, \text{ para amostras de } Eucalyptus \text{ sp.} \quad (\text{A})$$

$$E_D = 310,15 + 1,07 E_E, \text{ para amostras de } Pinus \text{ oocarpa} \quad (\text{B})$$

3.2. Modos de vibração

Um corpo de prova pode vibrar em diferentes modos e para cada um destes há uma frequência fundamental característica [9]. Na figura 4 são apresentados alguns dos principais modos fundamentais de vibração.

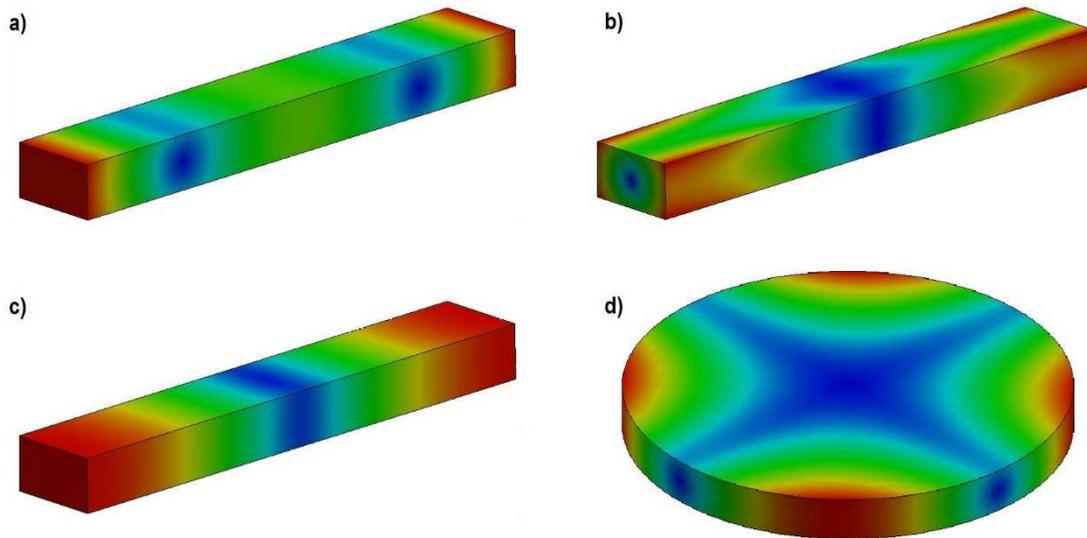


Figura 4 - Modos fundamentais de vibração: a) flexional, b) torcional, c) longitudinal e d) planar. As regiões em azul representam os pontos em que a amplitude de vibração é mínima, enquanto as regiões em vermelho representam as regiões em que a amplitude de vibração é máxima.

O que determina qual modo de vibração será excitado são as condições de contorno impostas na caracterização. A frequência fundamental destes modos é determinada em função da geometria, da massa, das dimensões e dos módulos elásticos.

Nas Figuras 5 a-c [1,6] estão representadas as condições de contorno ótimas para os principais modos de vibração de uma barra e na Figura 5 d, de um disco. A partir das frequências de ressonância da amostra (determinadas pelo modo de vibração) e empregando as equações descritas pela norma ASTM E1876 [1] são calculados os módulos elásticos dinâmicos correspondentes.

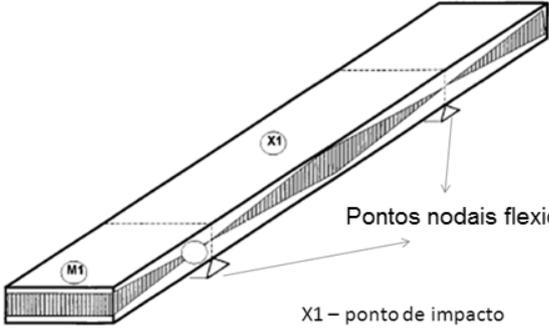
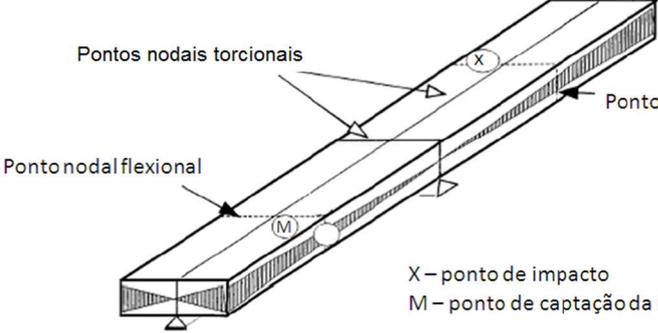
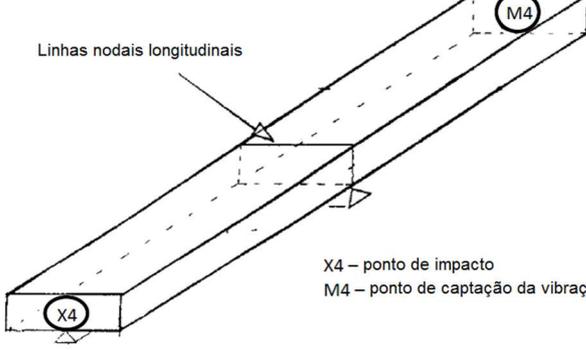
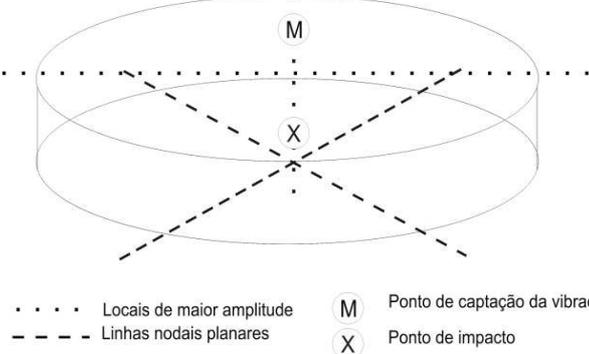
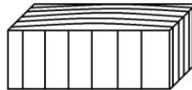
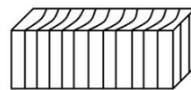
<p>a)</p> <p>Modo de vibração flexional</p>	 <p>Pontos nodais flexionais</p> <p>X1 – ponto de impacto M1 – ponto de captação da vibração</p>
<p>b)</p> <p>Modo de vibração torcional</p>	 <p>Pontos nodais torcionais</p> <p>Ponto nodal flexional</p> <p>X – ponto de impacto M – ponto de captação da vibração</p>
<p>c)</p> <p>Modo de vibração longitudinal</p>	 <p>Linhas nodais longitudinais</p> <p>X4 – ponto de impacto M4 – ponto de captação da vibração</p>
<p>d)</p> <p>Modo de vibração planar</p>	 <p>..... Locais de maior amplitude</p> <p>--- Linhas nodais planares</p> <p>M Ponto de captação da vibração</p> <p>X Ponto de impacto</p>

Figura 5 - Condições de contorno impostas ao corpo de prova para a excitação do modo de vibração fundamental (a) flexional, (b) torcional, (c) longitudinal e (d) planar.

3.3. Os módulos elásticos das madeiras

As madeiras possuem propriedades que variam de acordo com a orientação das fibras e dos anéis de crescimento. Quando caracterizada através da Técnica de Excitação por Impulso, é importante estar ciente da influência desta orientação e reportar corretamente qual módulo foi medido.

Tabela 1 - Módulos elásticos medidos de acordo com a orientação da madeira e os modos de vibração.

		Orientação da amostra		
		Longitudinal	Tangencial	Radial
				
Modo de vibração	Flexional	E_L	E_T	E_R
	Torcional	$G_{ef} (G_{LT}, G_{LR})$	$G_{ef} (G_{LT}, G_{RT})$	$G_{ef} (G_{LR}, G_{RT})$
	Longitudinal	E_L	E_T	E_R

A Tabela 1 indica os módulos elásticos que podem ser caracterizados utilizando a Técnica de Excitação por Impulso e suas direções relativas a um corpo de prova genérico. Nesta tabela, os termos utilizados [5,10] são definidos por:

E_L – Módulo de Young na direção longitudinal;

E_T – Módulo de Young na direção tangencial;

E_R – Módulo de Young na direção radial;

G_{ef} – Módulo de cisalhamento (módulo de rigidez) caracterizado pelo equipamento Sonelastic®. Este módulo corresponde a uma combinação dos módulos G_{ij} indicados entre parênteses [5];

G_{LT} – Módulo de rigidez associado a deformações de cisalhamento no plano tangencial (LT) resultante do cisalhamento nos planos LR e RT;

G_{RT} – Módulo de rigidez associado a deformações de cisalhamento no eixo transversal (RT) resultante do cisalhamento nos planos LR e LT;

G_{LR} – Módulo de rigidez associado a deformações de cisalhamento no plano radial (LR) resultante do cisalhamento nos planos LT e RT.

3.3.1 Módulo de Young

- **Modo de vibração longitudinal**

Quando o corpo de prova for solicitado na direção longitudinal (ver condições de contorno na figura 5c), o módulo elástico que será medido corresponde ao módulo de Young na direção do comprimento do corpo de prova. Ou seja, a orientação da amostra é o que determinará qual o módulo elástico que estará sendo avaliado (E_L , E_R , E_T ou combinação entre eles), como apresentado na Tabela 1.

- **Modo de vibração flexional**

Quando um corpo é flexionado, ocorrem solicitações simultâneas de tração e compressão, como mostra a Figura 6. Para materiais homogêneos e isotrópicos, o módulo elástico obtido em um ensaio de flexão coincide com o módulo elástico medido na direção longitudinal. Portanto, o módulo elástico dinâmico obtido por meio do modo de vibração flexional é o mesmo que o obtido por meio do modo de vibração longitudinal [11]. Porém, sabe-se que, em flexão, a superfície do material é a região em que estão presentes os maiores valores de tensão normal. Por essa razão, caso a rigidez do corpo de prova seja diferente na superfície em comparação ao centro (por exemplo, se houver um gradiente de rigidez ao longo da espessura) ou caso a amostra apresente pequenos defeitos como poros, trincas e micro-trincas em sua superfície, haverá uma discrepância nos valores obtidos pelo modo de vibração flexional e longitudinal. Há diversos trabalhos focados na avaliação de madeiras que relatam diferenças de valores de acordo com o modo de vibração [10,12-14].

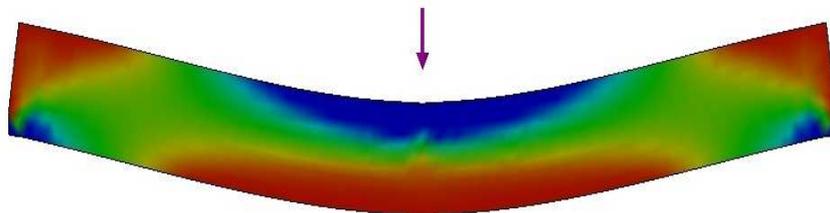


Figura 6 - Região em tração (vermelho) e em compressão (azul) durante um ensaio de flexão.

3.3.2 Módulo de cisalhamento (Módulo de Rigidez)

- **Modo de vibração torcional**

Quando um corpo de prova é solicitado na torção, dois modos de cisalhamento agem simultaneamente. Se a torção ocorrer como descrito na figura 5b, os módulos de rigidez atuantes são os associados aos planos que estão sendo cisalhados (quatro planos laterais). Portanto, o módulo de cisalhamento calculado a partir da frequência de vibração torcional fundamental corresponderá a um módulo efetivo. Assim, o resultado obtido pelo [Sonelastic®](#) será uma combinação dos módulos de cisalhamento atuantes (a Tabela 1 indica os módulos de cisalhamento que compõem o valor efetivo para cada tipo de corpo de prova) [5].

3.3.3 Coeficiente de Poisson

A caracterização do coeficiente de Poisson pela Técnica de Excitação por Impulso não é possível para materiais ortotrópicos como a madeira. Porém, a partir da Teoria da Elasticidade (utilizando a matriz rigidez), é possível obter correlações entre os coeficientes de Poisson e os módulos de Young. A seguir estão descritas estas relações (no apêndice A é possível visualizar a matriz rigidez para estes materiais).

$$\frac{\nu_{LR}}{E_L} = \frac{\nu_{RL}}{E_R}, \quad \frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}, \quad \frac{\nu_{RT}}{E_R} = \frac{\nu_{TR}}{E_T}$$

3.4. Valores esperados para os módulos elásticos de madeiras

As madeiras podem ser classificadas como de baixa densidade ou de alta densidade. A maioria das madeiras de alta densidade apresentam valores maiores de módulos elásticos e resistência [2].

Na tabela 2 são apresentados valores estimados de módulos elásticos em função dos valores de E_L para madeiras de baixa densidade, ou seja, tem-se a variação das propriedades elásticas de acordo com a variação de E_L .

Tabela 2 - Parâmetros elásticos em função de E_L para madeiras de baixa densidade (valores em GPa) [5].

E_L	E_R	E_T	G_{LR}	G_{LT}	G_{RT}
6,0	0,6990	0,3667	0,6564	0,6185	0,0518
7,0	0,7710	0,4069	0,6763	0,6366	0,0566
8,0	0,7856	0,4453	0,6962	0,6546	0,0612
9,0	0,8241	0,4821	0,7161	0,6727	0,0655
10,0	0,8601	0,5177	0,7353	0,6907	0,0696
11,0	0,8940	0,5521	0,7558	0,7088	0,0736
12,0	0,9262	0,5855	0,7756	0,7268	0,0774
13,0	0,9567	0,6180	0,7955	0,7449	0,0811
14,0	0,9860	0,6497	0,8154	0,7629	0,0846
15,0	1,0140	0,6806	0,8352	0,7810	0,0881
16,0	1,0409	0,7109	0,8551	0,7990	0,0914
17,0	1,0668	0,7406	0,8750	0,8170	0,0946
18,0	1,0919	0,7698	0,8948	0,8351	0,0979

4. Estudo de caso 1: Caracterização de barras de Eucalipto utilizando as soluções Sonelastic®

Neste estudo de caso será descrita a caracterização de barras prismáticas de Eucalipto (*Eucalyptus sp.*) com duas orientações distintas utilizando as soluções [Sonelastic®](#) (Técnica de Excitação por Impulso).

4.1. Materiais e métodos

A figura 7 indica a vista de topo da seção de uma árvore, sendo os círculos concêntricos correspondentes aos anéis de crescimento. Nesta figura estão ilustrados três possíveis cortes para a obtenção de amostras no formato de barras. As amostras indicadas por (1) e (2) são as ideais para a obtenção de E_T e E_R , respectivamente. Em (1), a direção do comprimento consiste na direção tangencial aos anéis de crescimento e em (2), a direção do comprimento consiste na direção radial do crescimento da árvore [5].

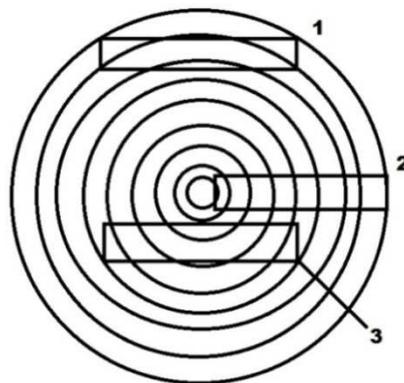


Figura 7 - Identificação dos melhores locais para cortar amostras a fim de caracterizar os módulos E_T (1) e E_R (2). O corte em (3) combina as direções R e T.

Por outro lado, o corpo de prova indicado em (3) combina as direções R e T. Assim como neste estudo de caso, é possível caracterizar os módulos de uma barra com esta configuração, porém os valores obtidos serão efetivos, ou seja, resultado de uma combinação entre E_R e E_T .

As figuras 8 e 9 indicam a orientação das fibras das madeiras caracterizadas. Percebe-se que o corpo de prova ilustrado na figura 8 possui suas fibras orientadas na mesma direção do comprimento (estas barras receberam o índice “L”). Já o corpo de prova ilustrado na figura 9 possui suas fibras orientadas na direção transversal e há uma

combinação entre as direções radial e tangencial na direção do comprimento (estas barras receberam o índice “RT”).



Figura 8 - Corpo de prova com orientação das fibras na direção do comprimento.



Figura 9 - Corpo de prova com orientação mista entre radial e tangencial na direção do comprimento.

As dimensões nominais dos corpos de prova são 145 mm x 25 mm x 25 mm e foram mensuradas utilizando um paquímetro, já a massa foi mensurada utilizando uma balança de precisão. Estes parâmetros são necessários para o cálculo dos módulos elásticos.

Para a realização da caracterização por meio da Técnica de Excitação por Impulso foi empregado o equipamento [Sonelastic®](#).

As amostras foram caracterizadas com relação aos principais modos de vibração (flexional, torcional e longitudinal) utilizando o suporte ajustável para barras e cilindros (SA-BC), o atuador eletromagnético ajustável (IED), um captador direcional e um *software* específico (estes itens fazem parte das soluções [Sonelastic®](#) para a caracterização de materiais de médio porte). A figura 10 apresenta esta versão do equipamento.

Para o cálculo dos módulos elásticos, empregou-se um valor para o coeficiente de Poisson igual a $0,25 \pm 0,25$. Assim como mencionado, o coeficiente pode variar

significativamente dependendo da orientação das fibras no corpo de prova; em função disso foi considerada a incerteza de 0,25 que compreende os valores possíveis para esta propriedade (Obs.: a influência do coeficiente de Poisson nos cálculos dos módulos elásticos é baixa; isso pode ser verificado pelos erros absolutos dos módulos presentes nas tabelas 5 e 6).



Figura 10 - Equipamento desenvolvido pela ATCP Engenharia Física ([Sonelastic®](http://www.sonelastic.com)) para medição dos módulos elásticos empregando a Técnica de Excitação por Impulso.

4.2. Resultados e discussão

As amostras foram separadas em dois grupos principais, sendo que a divisão foi realizada considerando-se a direção das fibras. Nas tabelas 3 e 4 são mostrados os valores das dimensões e respectiva massa. Nas tabelas 5 e 6 são mostrados os valores de módulos elásticos caracterizados usando o [Sonelastic®](http://www.sonelastic.com).

Tabela 3 – Dimensões e massa dos corpos de prova orientados na direção R e T.

Corpo de prova	Comprimento, L (mm)	Largura, W (mm)	Espessura, T (mm)	Massa (g)
RT - 01	142,95 ± 0,15	24,05 ± 0,15	24,35 ± 0,15	77,44 ± 0,01
RT - 02	144,95 ± 0,15	24,15 ± 0,15	24,35 ± 0,15	77,37 ± 0,01
RT - 03	143,80 ± 0,15	23,90 ± 0,15	24,00 ± 0,15	78,01 ± 0,01
RT - 04	143,20 ± 0,15	24,20 ± 0,15	24,35 ± 0,15	68,73 ± 0,01

Tabela 4 - Dimensões e massa dos corpos de prova orientados na direção L.

Corpo de prova	Comprimento, L (mm)	Largura, W (mm)	Espessura, T (mm)	Massa (g)
L - 01	144,05 ± 0,15	24,10 ± 0,15	23,95 ± 0,15	63,65 ± 0,01
L - 02	144,25 ± 0,15	23,95 ± 0,15	24,10 ± 0,15	76,74 ± 0,01
L - 03	143,90 ± 0,15	23,60 ± 0,15	23,85 ± 0,15	75,22 ± 0,01
L - 04	144,00 ± 0,15	24,25 ± 0,15	24,40 ± 0,15	64,34 ± 0,01

Tabela 5 - Valores obtidos de módulos elásticos em função do modo de vibração (amostras “RT”).

Corpo de prova	Modo longitudinal	Modo flexional	Modo torcional
	E_{ef} (GPa)	E_{ef} (GPa)	G_{ef} (GPa)
RT – 01	$1,45 \pm 0,05$	$1,50 \pm 0,06$	$1,20 \pm 0,01$
RT – 02	$1,23 \pm 0,04$	$1,30 \pm 0,05$	$1,12 \pm 0,01$
RT – 03	$1,55 \pm 0,05$	$1,67 \pm 0,06$	$1,25 \pm 0,01$
RT – 04	$1,40 \pm 0,05$	$1,45 \pm 0,05$	$1,21 \pm 0,01$
Média	1,41	1,48	1,20
Desvio padrão	0,13	0,15	0,05

Tabela 6 - Valores obtidos de módulos elásticos em função do modo de vibração (amostras “L”).

Corpo de prova	Modo longitudinal	Modo flexional	Modo torcional
	E_L (GPa)	E_L (GPa)	G_{ef} (GPa)
L – 01	$18,01 \pm 0,64$	$13,16 \pm 0,49$	$1,13 \pm 0,01$
L – 02	$22,39 \pm 0,79$	$17,87 \pm 0,66$	$1,34 \pm 0,01$
L – 03	$21,33 \pm 0,76$	$17,23 \pm 0,64$	$1,43 \pm 0,02$
L – 04	$18,19 \pm 0,64$	$14,19 \pm 1,15$	$1,15 \pm 0,01$
Média	19,98	15,61	1,26
Desvio padrão	2,21	2,29	0,15

Os valores indicados de módulo de Young na tabela 5 são efetivos, pois estas amostras apresentam uma combinação entre as direções R e T em seu comprimento. Já os módulos medidos para os corpos de prova com índice “L” são considerados como sendo E_L , uma vez que as fibras estão direcionadas longitudinalmente (tabela 6).

Nota-se uma diferença entre os módulos medidos na direção longitudinal e flexional, principalmente para as amostras “L”. Esta diferença pode ser explicada por dois fatores principais: o primeiro e mais crítico é a presença de descontinuidades como trincas na superfície dos corpos de prova, influenciando mais pronunciadamente as medidas feitas na flexão; já o outro fator que também pode vir a influenciar nas medições é a presença de um gradiente de rigidez ao longo da espessura das amostras, de forma que a superfície seja mais ou menos rígida que o interior, alterando assim os valores obtidos. Para as madeiras há uma tendência de que as propriedades obtidas no modo longitudinal sejam superiores às obtidas no modo flexional [10,12-14].

Por fim, o G_{ef} consiste em um módulo de rigidez que combina os módulos dos diferentes planos que estão sendo cisalhados durante a vibração. Por exemplo, o G_{ef} para as amostras na direção “L” é uma combinação entre G_{LR} e G_{LT} . Por outro lado, para as amostras na direção “RT” essa análise é mais complexa já que a direção principal do corpo de prova não corresponde a uma orientação definida (L, R ou T).

5. Estudo de caso 2: Estimativa e caracterização do módulo de Young de um cilindro compósito metálico e de uma tora de madeira contendo cerne e alburno

Neste estudo de caso está descrito um modelo que permite prever os módulos de Young de dois materiais dispostos de forma concêntrica em um cilindro, sendo necessária apenas a caracterização dos módulos longitudinal (E_{long}) e flexional (E_{flex}) de uma amostra deste tipo de compósito. Adicionado a isso, este modelo foi aplicado para a previsão dos módulos de Young do cerne e do alburno de um tronco de madeira a partir da caracterização de uma amostra que contem estes componentes.

O trabalho visou abordar com mais detalhes o porquê do módulo de Young obtido pelo modo de vibração longitudinal ser diferente do módulo obtido pelo modo de vibração flexional para madeiras e outros tipos de materiais. Adicionado a isso, objetivou-se construir um modelo que consiga prever o módulo de Young de forma simultânea e não-destrutiva de um corpo de prova cilíndrico que possua dois componentes concêntricos.

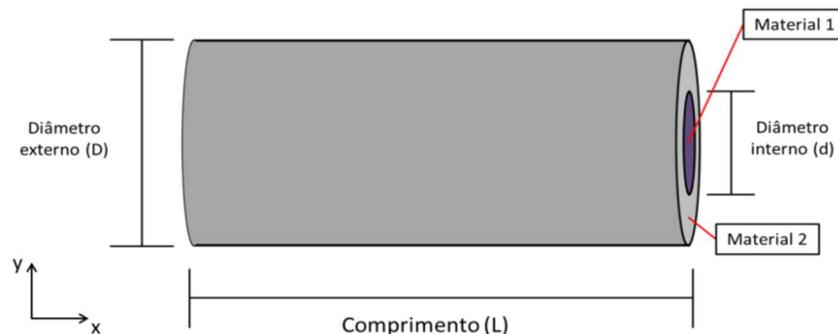


Figura 11 - Esquematização de um cilindro compósito assim como utilizado neste estudo.

5.1. Fundamentos e equações

Acredita-se que uma das possíveis razões pela qual se obtém diferentes valores de módulo de Young para um mesmo corpo de prova em ensaios de flexão e ensaios uniaxiais (tração e compressão) seja devido à diferença de rigidez ao longo da espessura da amostra. Isso pode se dar em duas ocasiões especiais: a primeira ocorre quando a superfície do material possui mais ou menos defeitos como trincas e micro trincas em relação ao seu interior (neste caso os valores obtidos em um ensaio de flexão tendem a ser diferentes aos obtidos em um ensaio de tração); a segunda ocorre quando há a presença de um gradiente de rigidez ao longo da espessura da amostra (como a distribuição de

tensão na flexão não é uniforme ao longo da seção transversal, as regiões mais externas que sofrem maior sollicitação serão as que influenciarão mais pronunciadamente nos valores obtidos).

As madeiras, devido à sua composição química e disposição anatômica, possuem uma tendência em apresentar maior rigidez em tração do que em compressão (em ensaios paralelos à direção das fibras). A influência destes comportamentos distintos possivelmente afeta de forma diferente o modo de vibração longitudinal e flexional, gerando assim valores distintos de rigidez em cada um destes modos.

Por essa razão, diferentes abordagens devem ser utilizadas para previsão do módulo de Young de um cilindro compósito. Caso o corpo de prova não possua trincas superficiais críticas, é possível prever os módulos de Young de seus componentes de forma simultânea e não-destrutiva. Abaixo estão descritas as equações finais para se realizar estas previsões (o desenvolvimento completo dos modelos está descrito no Anexo B deste documento).

$$E_1 = \frac{E_{long}(D^2 + d^2) - E_{flex}D^2}{d^2} \quad (C)$$

$$E_2 = \frac{E_{flex}D^2 - E_{long}d^2}{(D^2 - d^2)} \quad (D)$$

E_1 representa o módulo de Young do material interno do cilindro (região do cerne para as madeiras); E_2 , o módulo de Young do material externo (região do alburno para as madeiras); D , o diâmetro externo do cilindro e, por fim, d , o diâmetro interno (representação descrita na figura 11).

5.2. Materiais e métodos

Os materiais utilizados para os testes iniciais foram um cilindro de aço ($\rho_{ap} = 7,8 \text{ g/cm}^3$) com 11,75 mm de diâmetro e um cilindro de alumínio ($\rho_{ap} = 2,8 \text{ g/cm}^3$) com 29,71 mm de diâmetro, ambos maciços. Para a avaliação dos módulos de um cilindro de madeira, utilizou-se um tronco torneado composto por cerne e alburno bem destacados, assim como duas barras retangulares do cerne e do alburno separadamente.

No cilindro de alumínio foi feito um furo de aproximadamente 12,0 mm de diâmetro no centro da seção transversal, ao longo de todo o comprimento da peça, de forma que o

cilindro maciço de aço pudesse se encaixar no interior deste vazio. Foi então fixado o cilindro de aço no interior do cilindro de alumínio utilizando cola epóxi. Na figura 12 há a representação do cilindro metálico ($\rho_{ap} = 3,6 \text{ g/cm}^3$) utilizado nos estudos preliminares.

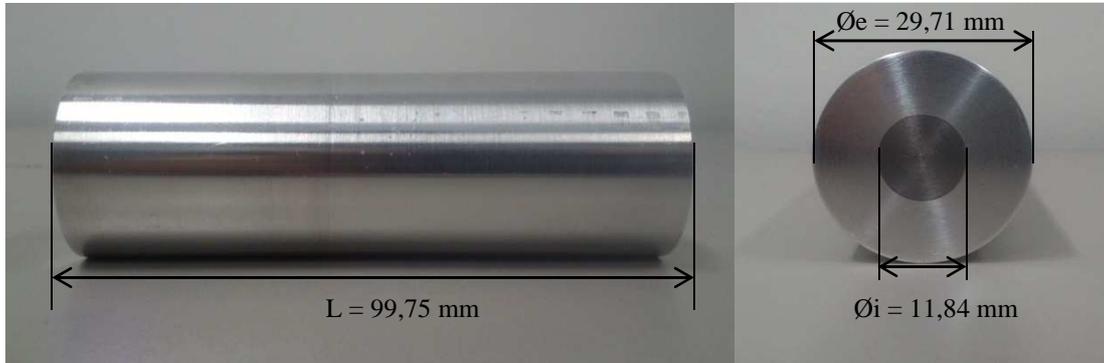


Figura 12 - Cilindro composto utilizado (região externa: alumínio; região interna: aço).

Após o modelo ter sido aplicado para o cilindro metálico, foi aplicado o modelo de previsão dos módulos de Young para o cilindro de madeira. A título de comparação, caracterizaram-se separadamente amostras tanto do cerne quanto do alburno a fim de se verificar se o modelo também é válido para madeiras. A figura 13 ilustra o cilindro utilizado e a figura 14, as amostras de cerne e de alburno.



Figura 13 – Galho de madeira torneado com bom acabamento superficial. Destaque para a região central do tronco composto pelo cerne e a região externa composta pelo alburno.



Figura 14 – Amostras de cerne e de alburno.

5.3. Resultados e discussão

5.3.1. Cilindro compósito metálico

A tabela 7 evidencia as medidas das dimensões e da massa dos metais utilizados. Os resultados obtidos pelo Sonelastic[®] estão representados na tabela 8.

Tabela 7 - Massa e dimensões das amostras cilíndricas de metal.

	Massa (g)	L (mm)	Desvio	D (mm)	Desvio	d (mm)
Alumínio maciço	194,56	99,94	0,03	29,71	0,03	-
Aço	118,61	139,65	0,05	11,75	0,09	-
Cilindro compósito	246,76	99,75	0,04	29,71	0,04	11,84

Tabela 8 - Valores medidos pelo equipamento Sonelastic[®] para os cilindros metálicos.

	E _{flex} (GPa)	Incerteza	E _{long} (GPa)	Incerteza
Alumínio maciço (material 1)	72,19	0,54	71,88	0,45
Aço (material 2)	211,84	7,60	213,01	3,96
Cilindro compósito	77,38	0,67	93,34	0,61

Portanto, aplicando os modelos para previsão dos módulos de Young do aço e do alumínio:

$$E_1 = E_{aço} = \frac{93,34 \cdot (29,71^2 + 11,84^2) - 77,38 \cdot 29,71^2}{11,84^2} = 193,83 \text{ GPa}$$

$$E_2 = E_{alumínio} = \frac{77,38 \cdot 29,71^2 - 93,34 \cdot 11,84^2}{(29,71^2 - 11,84^2)} = 74,37 \text{ GPa}$$

A tabela 9 faz um comparativo entre os módulos teóricos previstos pelo modelo e valores experimentais obtidos utilizando o Sonelastic[®].

Tabela 9 – Tabela comparativa entre o modelo e a caracterização dos materiais metálicos.

	E _{aço} (GPa)	E _{alum} (GPa)
Teórico (previsto pelo modelo)	193,83	74,37
Experimental (Sonelastic [®])	211,84	72,19
Variação absoluta*	18,01	2,18
Variação (%)*	8,5%	3,0%

* Variação absoluta (VA) = |Experimental – Teórico| e Variação (%) = (VA/Exp.)*100

Pode-se visualizar que houve uma pequena variação entre os valores medidos e os obtidos pelo modelo. As principais causas para estas diferenças são: no modelo, considera-se que os materiais isolados possuem $E_{flex} = E_{long}$ (o que não foi visualizado para os materiais caracterizados inicialmente); não foi levada em consideração a camada de cola epóxi; finalmente, a influência do coeficiente de Poisson não foi considerada.

Apesar disso, pode-se dizer que houve uma boa concordância entre o modelo utilizado e as caracterizações feitas utilizando o equipamento [Sonelastic®](#).

5.3.2. Cilindro de madeira e amostras de cerne e de alburno

As tabelas 10 e 11 evidenciam as medidas das dimensões e da massa referente ao cilindro de madeira e às barras prismáticas de alburno e de cerne, respectivamente.

Tabela 10 - Massa e dimensões do cilindro de madeira.

	Massa (g)	L (mm)	Desvio	Øe (mm)	Desvio	Øi (mm)
Cilindro	1849,91	408,33	1,25	88,47	0,50	58,40

Tabela 11 - Massa e dimensões das amostras de cerne e alburno.

	Massa (g)	L (mm)	Desvio	W (mm)	Desvio	H (mm)	Desvio
Alburno 1	89,85	151,57	0,36	25,60	0,09	25,79	0,08
Alburno 2	90,31	151,84	0,09	25,14	0,16	25,64	0,18
Cerne 1	61,65	151,86	0,13	25,63	0,17	24,53	0,25
Cerne 2	62,83	151,73	0,06	25,66	0,09	25,03	0,22

Os resultados obtidos para o cilindro de madeira estão representados na tabela 12 e os resultados obtidos para as barras prismáticas estão representados na tabela 13.

Tabela 12 - Resultados obtidos através da caracterização do cilindro de madeira utilizando o [Sonelastic®](#).

	E_{flex} (GPa)	Incerteza	E_{long} (GPa)	Incerteza
Cilindro de madeira	7,93	0,24	8,84	0,16

Tabela 13 - Resultados obtidos através da caracterização das amostras de cerne e de alburno utilizando o [Sonelastic®](#).

	E_{flex} (GPa)	Incerteza	E_{long} (GPa)	Incerteza
Alburno 1	8,80	0,16	10,03	0,16
Alburno 2	7,90	0,22	8,42	0,21
Cerne 1	7,95	0,3	9,23	0,28
Cerne 2	8,43	0,28	10,04	0,25

Pode-se visualizar que o módulo de Young das amostras prismáticas retangulares de cerne e de alburno foi praticamente igual, dentro das incertezas de medição. Atribuiu-se a diferença apresentada pelos módulos do cilindro à integridade de sua superfície, que apesar de ter sido torneada, demonstrou algumas trincas e, por essa razão, pode ter influenciado negativamente nas medições que envolveram a flexão como principal modo de vibração.

As possíveis causas que podem levar à diferença de rigidez entre o cerne e o alburno envolvem principalmente a idade do tecido formado e a quantidade de defeitos que estes apresentam. Apesar disso, devido ao caráter natural deste material, outras variáveis também podem contribuir para o aumento ou abaixamento dos módulos elásticos destas regiões específicas [15].

Acredita-se que para as amostras de madeira aqui avaliadas, a influência da integridade superficial se sobrepôs à diferença de rigidez de seus constituintes, visto que não houve uma diferença significativa entre os módulos de Young das amostras de cerne e de alburno.

6. Considerações finais

A madeira possui caráter anisotrópico, ou seja, suas propriedades dependem da orientação em que são feitas as medições. Por esta razão, a direção principal das amostras deve sempre ser levada em consideração e reportada nos resultados da propriedade que está sendo avaliada.

A partir da orientação do corpo de prova e das condições de contorno ótimas para os modos de vibração flexional e longitudinal, obtêm-se os principais módulos elásticos da madeira: E_L , E_R e E_T . A Técnica de Excitação por Impulso também permite a caracterização do módulo de rigidez efetivo por meio da excitação de um corpo de prova de forma que ele vibre no modo torcional.

Por fim, foi apresentado um estudo de caso e um modelo para previsão simultânea e não-destrutiva dos módulos de Young do cerne e do alburno de um cilindro, utilizando, para isso, os modos de vibração longitudinal e flexional a partir da Técnica de Excitação por Impulso ([Sonelastic®](#)). Este estudo de caso evidenciou que a integridade superficial influencia significativamente nas medições e pode ser a principal razão da obtenção de módulos diferentes em ensaios de vibração nos modos flexional e longitudinal.

7. Referências bibliográficas

- [1] ASTM International. *Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Impulse Excitation of Vibration*; ASTM E 1876. 2007. 15 p.
- [2] DİNÇKAL, Ç. Analysis of Elastic Anisotropy of Wood Material for Engineering Applications. *Journal of Innovative Research in Engineering and Science*, Global Research Publishing, pp. 67-80, abr. 2011.
- [3] Ponte de Madeira na floresta de Montmorency. Disponível em: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/be/Wood_bridge_Montmorency.jpg>. Acesso em: 18 de Março de 2013.
- [4] Adaptado de CALIL JUNIOR, C.; LAHR, F.A.R.; DIAS, A.A. *Dimensionamento de elementos estruturais de madeira*. Barueri: Manole, 2003. 152 p.
- [5] BODIG, J., JAYNE, B. A. *Mechanics of wood and wood composites*. Malabar (EUA), Krieger Publishing Company, 1993.
- [6] COSSOLINO, L.C., PEREIRA, A.H.A. Módulos elásticos: visão geral e métodos de caracterização. Informativo Técnico – ATCP Engenharia Física. Out/2010. Disponível em: <<http://www.atcp.com.br/imagens/produtos/sonelastic/artigos/RT03-ATCP.pdf>>. Acessado em: 18 de Março de 2013.
- [7] SEGUNDINHO, P.G.A., COSSOLINO, L.C., PEREIRA, A.H.A, JUNIOR, C.C. Aplicação do método de ensaio das frequências naturais de vibração para obtenção do módulo de elasticidade de peças estruturais de madeira. *Revista Árvore*, Viçosa-MG, v.36, n.6, p.1155-1161, 2012.
- [8] Esquema de posicionamento e caracterização de acordo com a norma ASTM E1876. Disponível em: <<http://www.atcp.com.br/pt/produtos/caracterizacao-materiais/propriedades-materiais/modulos-elasticos/metodos-caracterizacao-.html>> Acessado em: 04 de Abril de 2013.
- [9] HEYLIGER, P., UGANDER, P., LEDBETTER, H. Anisotropic Elastic Constants: Measurement by Impact Resonance. *Journal of Materials in Civil Engineering*, pp. 356-363, set/out 2001.
- [10] WANGAARD, F.F. *The Mechanical Properties of Wood*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1950.
- [11] KAW, A.K. *Mechanics of composite materials*. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2 ed, 2006, 457 p.
- [12] ROCHA, J.S., PAULA, E.V.C.M. de, SIQUEIRA, M.L. Flexão Estática em amostras pequenas livres de defeitos. *Acta Amazonica*, Manaus, p. 147-162. 1988.
- [13] CHO, C.L., Comparison of Three Methods for Determining Young's Modulus of Wood. *Taiwan Journal for Science*, pp. 297-306, Maio/2007.
- [14] BUCUR, V., *Acoustics of Wood*. 2ª ed. Germany: Springer, 2006. p. 393.
- [15] WANGAARD, F. F. *The Mechanical Properties of Wood*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950.
- [16] CALLISTER Jr., W.D. *Materials Science and Engineering*. 7ª ed. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2007.
- [17] Curva Tensão-Deformação. Disponível em: <http://www.ctb.com.pt/?page_id=1471>. Acessado em: 08 de Julho de 2014.
- [18] NYE, J.F. *Physical Properties of Crystals: their representation by tensors and matrices*. Oxford: At the Clarendon Press. 1957.

Apêndice A – Teoria da elasticidade aplicada às madeiras

As madeiras são materiais anisotrópicos, ou seja, suas propriedades variam de acordo com a orientação de sollicitação. Por esta razão, a teoria da elasticidade aplicada a este tipo de material é mais complexa do que se comparada à teoria aplicada a materiais isotrópicos. Devido a esta maior complexidade, este apêndice apresenta como são apresentadas e definidas as propriedades elásticas voltadas para as madeiras.

- **Introdução: Módulo de Young – Lei de Hooke**

A partir do ensaio de tração de um material isotrópico (um metal recozido, por exemplo), durante o regime elástico é possível correlacionar a tensão e a deformação descrita pela Equação 1 (Lei de Hooke) [16]:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1)$$

A Figura 15 evidencia uma curva típica de um ensaio de tração quase-estático a partir da qual se obtém as principais propriedades mecânicas de um material. O módulo de Young, E , é o coeficiente angular da curva quando o corpo de prova estiver em seu regime elástico (início da curva).

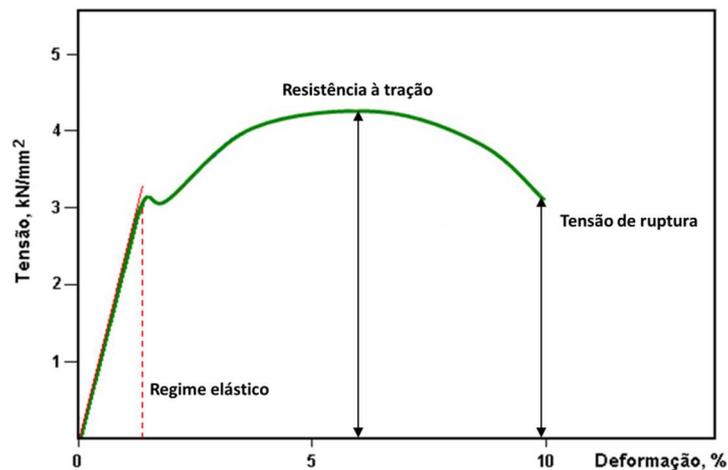
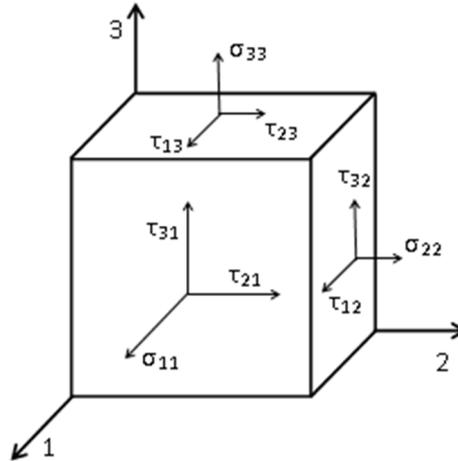


Figura 15 - Curva tensão-deformação de um aço de alta resistência [17].

- **Tensão e deformação – modelo tridimensional**

O esquema a seguir apresenta um volume infinitesimal com as possíveis tensões que aparecem durante o carregamento de um corpo.



Nota-se que há dois tipos de solicitações presentes neste modelo: a tensão em tração representada por σ e a tensão em cisalhamento representada por τ . Por conveniência, este modelo pode ser representado por uma matriz 3x3 (Equação 2).

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Assumindo o equilíbrio de forças neste volume, as tensões de cisalhamento direcionadas para a mesma aresta do cubo são iguais (por exemplo, $\tau_{12} = \tau_{21}$). Ou seja, o carregamento de um corpo pode ser representado por seis tensões distintas, representadas pela seguinte matriz simétrica:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Esta análise é semelhante do ponto de vista das deformações:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

• **Teoria da elasticidade anisotrópica**

Assim como descrito anteriormente, as madeiras possuem diferentes comportamentos nas diferentes direções, fazendo assim com que as relações entre tensão e deformação não sejam iguais entre si. Portanto, deve-se sempre levar em consideração a orientação do material para caracterizar suas propriedades elásticas.

A Lei de Hooke generalizada é mais complexa, pois leva em consideração a matriz tensão e deformação descrita no item anterior. Ela é dada pela seguinte relação:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \text{ em que } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Considerando a tensão e a deformação como matrizes quadradas de ordem 3, pode-se verificar que C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, conhecido como tensor rigidez [11]. A partir de relações de simetria descritas pelas equações a seguir, pode-se diminuir o número de constantes elásticas de 81 para 21.

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (6)$$

Uma notação reduzida é aplicada aos índices de forma a simplificar a correlação entre a tensão, a deformação e as constantes elásticas, como mostra a Tabela 14.

Tabela 14 - Abreviação da notação de 4 índices para 2 índices [18].

Notação de 4 índices	11	22	33	23	31	12
Notação de 2 índices	1	2	3	4	5	6

A partir de todas as considerações, tem-se que a matriz rigidez de um material anisotrópico com comportamento linear elástico é simétrica e pode ser descrita como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Outra forma de se representar a relação entre tensão e deformação de um material é através da matriz de flexibilidade, apresentada na Equação 8.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ou seja,

$$[S] = [C]^{-1} \quad (9)$$

Pode-se notar que para descrever completamente um material quanto às suas propriedades elásticas, é necessário encontrar suas 21 constantes elásticas. Vale ressaltar também que este modelo representa as propriedades de um determinado ponto em um material, ou seja, as constantes descritas podem variar de ponto a ponto caso o material não seja homogêneo. A título de simplificação, apesar de serem materiais heterogêneos, as madeiras são comumente consideradas homogêneas.

- **Tipos de materiais e simetrias presentes**

Apesar da variação das propriedades de acordo com a direção de sollicitação, a maioria dos materiais possui alguma organização interna que fará com que seja possível a simplificação dos termos das constantes elásticas apresentados no item anterior.

Caso um material não possua nenhum plano de simetria, este é denominado anisotrópico e todas as constantes elásticas serão independentes umas das outras [5].

Se um material possui variação de propriedades de acordo com as direções, porém planos ortogonais simétricos, estes são denominados materiais ortotrópicos. As madeiras são usualmente classificadas desta forma. Para caracterizar um corpo que possui este tipo de simetria são necessárias nove variáveis independentes [5].

Se um dos planos de simetria for isotrópico, o material ortotrópico é classificado como transversalmente isotrópico (no caso de madeiras, esta situação ocorreria se as propriedades na direção tangencial fossem iguais às da direção radial).

Por fim, o caso mais simples possível e que possui o menor número de variáveis independentes é quando o material possui isotropia em infinitos planos. Neste caso, o material é denominado isotrópico, ou seja, suas propriedades não variam de acordo com a direção. Portanto, a matriz de rigidez será dependente apenas de duas variáveis [5].

Apêndice B – Elaboração de um modelo para previsão do módulo de Young do cerne e do alburno de cilindros de madeiras

Para o desenvolvimento do modelo de previsão do módulo de Young longitudinal e flexional, utilizou-se um cilindro formado por dois metais dispostos de forma concêntrica, assim como demonstrado na figura 11 do estudo de caso 2.

- Carregamento na longitudinal (regra da mistura) [11]:

Aplicando-se uma força na direção longitudinal do cilindro, tem-se que esta carga será distribuída igualmente por toda a seção transversal do cilindro, de forma que:

$$F_x = F_1 + F_2 \quad (15)$$

Sabendo-se que a força aplicada corresponde à tensão multiplicada pela área:

$$\sigma_x \cdot A_T = \sigma_1 \cdot A_1 + \sigma_2 \cdot A_2 \quad (16)$$

Através da correlação entre tensão e deformação, tem-se que:

$$E_{ef} \cdot \varepsilon_x \cdot A_T = E_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot A_2 \quad (17)$$

Considerando as deformações iguais no caso de um carregamento uniaxial:

$$E_{ef} = E_1 \cdot \frac{A_1}{A_T} + E_2 \cdot \frac{A_2}{A_T} \quad (18)$$

Portanto, a relação entre os módulos seguirá a regra da mistura:

$$E_{ef} = E_1 \cdot V_{eq1} + E_2 \cdot V_{eq2} \quad (19)$$

Sendo que:

$$V_{eq1} = \frac{V_1}{V_T} = \frac{L \frac{\pi d^2}{4}}{L \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{d^2}{D^2} \quad e \quad V_{eq2} = \frac{V_2}{V_T} = \frac{L \frac{\pi(D^2-d^2)}{4}}{L \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{(D^2-d^2)}{D^2} \quad (20,21)$$

Substituindo as equações 20 e 21 na equação 19, tem-se a correlação entre o módulo de Young longitudinal do cilindro compósito em função dos diâmetros e do módulo de Young de seus componentes.

$$E_{long}^{ef} = \frac{E_1 \cdot d^2 + E_2 \cdot (D^2 - d^2)}{D^2} \quad (22)$$

- Carregamento na flexão (equação de Euler-Bernoulli):

A equação de Euler-Bernoulli para descrever a flexão de vigas pode ser descrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E \cdot I_z \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -p \quad (23)$$

Em que w é o deslocamento da linha neutra (ver figura 18); E é o módulo de Young do material; I_z é o segundo momento de área e p é a densidade linear de força aplicada na superfície do corpo.

A seguir está descrito o desenvolvimento para se chegar à equação de Euler-Bernoulli descrita pela equação 23, porém voltado para o estudo da flexão de uma viga formada por dois materiais distintos.

Inicialmente são aplicadas equações de equilíbrio em um elemento infinitesimal de uma barra retangular em flexão, assim como descrito na figura 16.

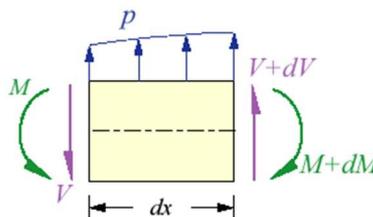


Figura 16 - Forças e momentos resultantes em um volume infinitesimal de um corpo sobre flexão.

Considerando o equilíbrio de forças e de momentos neste volume:

$$V - (pdx) - V - dV = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -p \quad (24)$$

$$M - M - dM + (pdx) \cdot dx + (V + dV) \cdot dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dM}{dx} = V \quad (25)$$

Substituindo a equação 25 na equação 24, tem-se que:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p \quad (26)$$

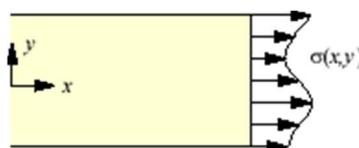


Figura 17 - Distribuição de tensão na seção transversal de um volume infinitesimal submetido à flexão.

A distribuição de tensão demonstrada na figura 17 descreve uma dependência aleatória da tensão ao longo da espessura do corpo, de forma que o momento será descrito como a integração entre a força resultante e as dimensões da seção transversal (y e z). A equação do momento resultante com relação à linha neutra é dada por:

$$M(x) = \iint y \cdot \sigma(x, y) dydz \quad (27)$$

Substituindo a equação 27 na equação 26, tem-se que:

$$\frac{d^2}{dx^2} (\iint y \cdot \sigma(x, y) dydz) = -p \quad (28)$$

Quando o volume do material submetido à flexão é formado por dois outros materiais distintos entre si, a distribuição de tensão na seção transversal pode ser descrita como a soma da distribuição de tensões em cada um dos componentes. Desconsiderando o efeito do coeficiente de Poisson, tem-se que:

$$\sigma(x, y) = \sigma_1(x, y) + \sigma_2(x, y) \rightarrow \sigma(x, y) = E_1 \cdot \varepsilon_1(x, y) + E_2 \cdot \varepsilon_2(x, y) \quad (29)$$

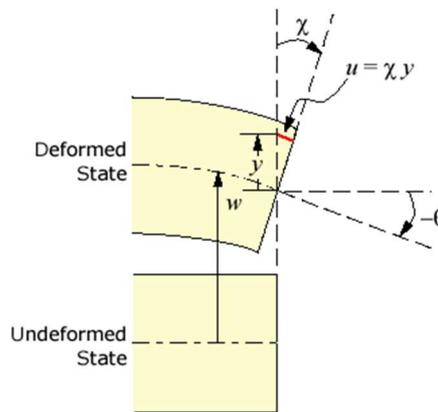


Figura 18 - Deformações nos eixos x e y de um volume infinitesimal submetido à flexão.

A partir da figura 18, pode-se verificar que:

$$u = \chi(x) y \quad e \quad \chi(x) = \frac{dw}{dx} \quad (30,31)$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{du}{dx} = y \frac{d\chi}{dx} = y \frac{d^2w}{dx^2} \rightarrow \varepsilon(x, y) = y \frac{d^2w}{dx^2} \quad (32)$$

tal que, w é o deslocamento fora do plano (distância em que a linha neutra se move a partir do equilíbrio); u é o deslocamento ocorrido na flexão; por fim, χ é a rotação da seção transversal.

Portanto, a partir das equações 29 e 32, tem-se que:

$$\sigma(x, y) = E_1 y \frac{d^2 w}{dx^2} + E_2 y \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (33)$$

Substituindo a equação 33 na equação 28:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\iint y \left(E_1 y \frac{d^2 w}{dx^2} + E_2 y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dydz \right] = -p \quad (34)$$

Considerando que a barra é formada por dois materiais diferentes como descrito na figura 11, pode-se dividir a integração para estas duas regiões:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\iint E_1 y^2 \frac{d^2 w}{dx^2} dydz + \iint E_2 y^2 \frac{d^2 w}{dx^2} dydz \right] = -p \quad (35)$$

Sabendo que o segundo momento de área para corpos de seção transversal retangular possui a seguinte forma:

$$I_z = \iint y^2 dydz \quad (36)$$

Portanto, a equação de Euler-Bernoulli para uma barra formada por dois materiais distintos, desconsiderando o efeito do coeficiente de Poisson, é dada por:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E_1 \cdot I_{z_1} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + E_2 \cdot I_{z_2} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = -p \quad (37)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(E_1 \cdot I_{z_1} + E_2 \cdot I_{z_2}) \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = -p \quad (38)$$

Comparando as equações 38 e 23 através da igualdade entre a distribuição de tensão (-p), pode-se estimar um valor efetivo para o módulo de Young medido na flexão, tal que:

$$E_{ef}^{flex} \cdot I_z = E_1 \cdot I_{z_1} + E_2 \cdot I_{z_2} \quad (39)$$

Apesar das equações descritas terem sido desenvolvidas para barras de seção retangular, o resultado final independe desta variável, pois mesmo realizando todas as trocas de variáveis necessárias o resultado não seria alterado. Portanto, considerando que para cilindros maciços $I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ e para cilindros ocos $I_z = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$. Obtém-se a seguinte correlação entre os módulos de Young:

$$E_{ef}^{flex} = \frac{E_1 \cdot d^4 + E_2 \cdot (D^4 - d^4)}{D^4} \quad (40)$$

Vale ressaltar que a partir deste modelo é possível visualizar que a superfície do corpo de prova influencia significativamente nas medidas realizadas no modo de vibração flexional. Este fator será crítico caso o corpo de prova apresente uma grande quantidade de defeitos nessa região.

- Desenvolvimento de um modelo para previsão do módulo de Young dos componentes de um cilindro compósito:

A partir das relações encontradas e descritas pelas equações 22 e 40, é possível algebricamente elaborar um sistema de duas variáveis, de tal forma que se possa, a partir dos módulos de Young de um cilindro compósito (E_{flex} e E_{long}), obter os módulos de Young dos componentes do cilindro (E_1 e E_2). Fazendo a simplificação do sistema e admitindo que os módulos flexional e longitudinal dos materiais 1 e 2 sejam iguais, tem-se que:

$$E_1 = \frac{E_{long}(D^2+d^2)-E_{flex}D^2}{d^2} \quad (44)$$

$$E_2 = \frac{E_{flex}D^2-E_{long}d^2}{(D^2-d^2)} \quad (45)$$

Estas são as equações principais (utilizadas no estudo de caso 2) para se obter o módulo de Young tanto do cerne quanto do alburno após a caracterização de apenas um cilindro de madeira que contenha estes dois componentes. A partir da convenção utilizada, pode-se inferir que E_1 representará o módulo de Young do cerne e E_2 representará o módulo de Young do alburno.

Apêndice C – Perguntas frequentes (FAQ)

- Em que geometria devo preparar os corpos de prova?

A norma ASTM E1876 descreve equações para algumas geometrias específicas como barras, cilindros, discos e anéis. No geral, para barras e cilindros é possível caracterizar E e G; para discos e anéis é possível caracterizar apenas o valor de E.

- Como considerar a orientação das fibras na caracterização e ao reportar os resultados?

A caracterização deve ser realizada e os resultados reportados considerando a direção principal do corpo de prova com relação às fibras, se esta é longitudinal, radial, tangencial ou uma combinação de direções (ver capítulo 3 – item 3.3).

- Qual valor de coeficiente de Poisson deve ser utilizado?

Como as madeiras são materiais anisotrópicos, não é possível obter um resultado confiável para o coeficiente de Poisson somente por esta técnica. Portanto, é necessário estimar um valor para esta propriedade. A tabela 15 indica valores possíveis para se informar ao software para o cálculo dos módulos elásticos (todos estão de acordo com valores médios apresentados pelas madeiras). Vale ressaltar que, de forma geral, a sensibilidade das medidas de módulo de Young com relação ao erro da estimativa do coeficiente de Poisson é baixa.

Tabela 15 - Coeficiente de Poisson para a caracterização do módulo de Young de madeiras em função da orientação da amostra [5].

Orientação da amostra	Coef. de Poisson envolvidos	Coef. de Poisson para madeiras de baixa densidade	Coef. de Poisson para madeiras de alta densidade
Longitudinal	ν_{LT} e ν_{LR}	$0,40 \pm 0,05$	$0,43 \pm 0,07$
Radial	ν_{RT} e ν_{RL}	$0,25 \pm 0,25$	$0,35 \pm 0,30$
Tangencial	ν_{TR} e ν_{TL}	$0,20 \pm 0,15$	$0,18 \pm 0,15$

- Como devo apoiar e excitar o corpo de prova?

As condições de contorno são determinadas em função do modo de vibração do módulo elástico desejado. Se o objetivo for obter o módulo de Young, as condições de contorno que priorizem tanto a vibração flexional quanto longitudinal atendem a necessidade. Porém, se o objetivo for obter o módulo de rigidez (cisalhamento), deve-se utilizar as condições de contorno que priorizem a vibração no modo torcional (ver capítulo 3 – item 3.2).

- Como é possível calcular os módulos de rigidez através dos módulos de rigidez efetivos?

A correlação entre essas propriedades não é trivial e dependerá de vários fatores. Cita-se como exemplo uma correlação descrita para amostras cilíndricas de madeira que faz uma associação em paralelo destas propriedades [5].